60605

91 8

RELAZIONE

Sulle tavole d' integrali definiti compilate da D. Bierens de Haan e pubblicate nel T. IV (1858) delle Memorie dell'Accademia d' Amsterdam

LETTA

DAL PROF. GIUSTO BELLAVITIS

nell' adunanza del 13 marzo 1859 dell' i. r. Istituto veneto di scienze, lettere ed arti

(Estr. dal Vol. IV, Serie III, degli Atti dell' Istituto stesso.)

—o—

Sono così rapidi ed incessanti i progressi della Matematica che, nell' impossibilità di prender conoscenza delle memorie pubblicate negli Atti delle Accademie e nei Giornali appositi, si fa ognor più sentire il bisogno che alcuno si accinga a compilare opere generali, le quali raccolgano quanto di veramente nuovo si va discoprendo. Ma pur troppo non presenta sufficiente allettamento l' improba fatica di studiare ed attentamente discutere ciò che fu fatto da tanti autori, sceverare il nuovo, e questo esporlo in modo acconcio, e che bene si colleghi colle altre teorie. Quanto più scarso è l' esempio, tanto più dee lodarsi chi eseguisce alcuna parte del difficile ed utilissimo lavoro.

Tra le varie formule, a cui per molte, e spesso indirette, strade giunsero i Matematici, si distinguono in ispecial modo quelle conosciute sotto il nome d' integrali definiti :

Digitized by Google

quando un calcolatore s'imbatte in uno di questi integrali gli è difficilissimo conoscere se esso sia già noto, sicchè ne possa aver subito il valore, oppure debba ricercarlo mediante il lungo processo delle quadrature, che vale soltanto nei casi del tutto particolari, cioè puramente numerici. Moltissime memorie furono pubblicate su tal argomento, ma non ancora furono trovati metodi abbastanza generali e diretti per la determinazione degli integrali definiti; era dunque importantissimo raccogliere almeno i finali risultamenti degli altrui lavori, e quest' opera laboriosa fu eseguita dal Matematico Olandese sig. D. Bierens de Haan riunendo in un volume, che è il IV delle Memorie dell' Accademia di Amsterdam di circa 600 pagine, più di tre migliaia d' integrali definiti. Egli dovette spogliare un gran numero di opere e di memorie, ed accompagnò le formule da lui portate coll' indicazione del luogo in cui le trovò; cura ottima, perchè serve a verificare le formule stesse e vedere il modo con cui si possono dimostrare. L'autore aggiunse agli integrali da lui raccolti altri che se ne deducono coi noti metodi di trasformazione, e ciò onde facilitare le ricerche e render più complete le sue tavole.

Quantunque estesissimo sia il lavoro, pure altra messe rimarrà certamente da aggiungervi; esso fu stampato nel 1858, ma si riferisce soltanto a ciò che era pubblicato prima del 1853; inoltre l' autore dichiara che molto gli rimaneva da cercare nei Giornali Inglesi ed Americani. Di autori Italiani sono citati Boncompagni, Cisa de Gresy, Libri, Plana, Tortolini ed anche Lagrange e Mascheroni, quantunque nella prefazione non sieno indicate le loro opere o memorie che furono spogliate (sarebbe stato opportuno che tal nota fosse compiuta, onde si sapesse di quali memorie rimanga da fare l' esame), non credo che l'Autore

conoscesse nè le memorie del Frullani, nè l'opera del Piola. Io scorsi rapidamente il trattato sugli integrali definiti inserito da quest'ultimo nei due volumi d'Opuscoli Matematici, che si pubblicavano nel 1832-34 a Milano, e riscontrando che gli integrali dimostrati dal Piola erano quasi tutti contenuti nelle tavole del Matematico Olandese, riconobbi col fatto la facilità di adoperare queste tavole. La ricerca più ardua era quella di una classificazione possibilmente razionale, e che riuscisse facile nella pratica. Ecco in qual modo si dee procedere per servirsi di queste tavole: si osserva se il proposto integrale definito contenga funzioni algebriche, — esponenziali, — logaritmiche, — circolari dirette, — circolari inverse, — od altre funzioni, e secondo che vi entrano una o due o più di queste sei specie diverse di funzioni, si riconosce dalla pag. 3 dell'opera in quale delle tre parti ed in quale delle 35 sezioni si debba ricercare quell'integrale; dopo di che nelle pagine che stanno di seguito si scorge come, a seconda delle diverse forme delle funzioni e dei differenti limiti dell'integrale, si debba cercarlo nell'una o nell'altra delle 447 tavole, che formano l'intera opera. Ciascuna tavola contiene di solito circa una ventina d'integrali distribuiti secondo il grado della loro semplicità. Dopo trovato l'integrale ed il suo valore bisogna rammentare di dar un'occhiata alle osservazioni e correzioni aggiunte nella Prefazione (*xvij ... xxxj*) ed occasionate da un nuovo esame del lavoro. La prima di queste aggiunte contiene le indicazioni dei Matematici che calcolarono il rapporto della circonferenza al diametro da Archimede con 2 decimali fino a Shanks con 530 decimali; prova questa non solo della facilità di calcolare, ma anche della propensione a perdere il suo tempo.

L' Autore aveva chiesto ai matematici indicazioni e consigli pel lavoro da lui progettato, ma niuno rispose al suo appello.

Per integrale definito s' intende quello, i cui due limiti sono determinati; se non si voglia che la distinzione sia di solo nome, bisogna soggiungere che i limiti sieno ambedue numerici, altrimenti se uno di essi fosse espresso da una lettera differente da quelle che entrano nell' integrale, esso sarebbe un vero integrale indefinito; giacchè niuno per certo dirà che la formula cangi quando invece della lettera x si scrive per esempio la p. Perciò in una raccolta d' integrali definiti sarebbero da escludersi quelli, che sono veri integrali indefiniti e già notissimi; veggansi per esempio tavola 3 (9), tav. 4 (11), tag. 12 (25), tav. 15 (10) e tavole 54, 41, 150, 254, 362, 364, ecc. Anche un integrale definito tra limiti numerici può essere una semplice trasformazione di un integrale indefinito; così per esempio l' integrale $a^2 \int e^{au} u du$ preso tra i limiti $u=0$, $u=1$ non differisce da $\int e^x x dx$ tra i limiti $x=0$, $x=a$, cioè dall'integrale indefinito. Potrebbero anche ommettersi gli integrali presi tra limiti numerici, che sono casi particolari di notissimi integrali indefiniti; peraltro essi sono veri integrali definiti; e lo possono pur essere quelli, i cui limiti letterali entrano già nella funzione da integrarsi; ma questi possono, e per l' uniformità di calcolo deggiono, ridursi ad integrali a limiti numerici apponendo alla variabile una costante o come moltiplicatore o come quantità aggiunta. Per tal maniera io crederei opportuno che tutti gli integrali definiti si riducessero a due sole specie, secondo che sono presi da $u=0$ ad $u=1$, o da $v=o$ a $v=\infty$, poichè trovo opportuno di considerare gli integrali da $w=-\infty$ a $w=\infty$ come la somma di due integrali da 0 a ∞. Un'altra

avvertenza che sarebbe stata utilissima ad abbreviare le tavole si è quella di elevare le variabili u,v,w a quelle potenze, e moltiplicare le v,w per quei coefficienti, che fossero opportuni a ridurre l' integrale sotto la forma più semplice. Così per esempio la (4) della tav. 40 non è niente più generale della (3), che è una conseguenza immediata della (7) (8) della tav. 36. In quanto alla classificazione degli integrali io avrei bramato che si badasse soltanto alla forma delle funzioni, riunendo insieme gli integrali definiti presi tra limiti differenti, i quali si sarebbero scorti adoperando due variabili u, v, alle quali potrebbe aggiungersi per comodità tipografica la t, che s'intendesse sempre presa da $t=0$ a $t=\frac{\pi}{2}$.

Ora che fu fatta una sì laboriosa raccolta si potrà migliorare la disposizione, e rendere l' opera molto meno voluminosa e più espressiva. Dallo studio delle 35 tavole contenute nella I. sezione relativa alle funzioni puramente algebriche mi pare poco opportuna la distinzione delle funzioni in intere o fratte, razionali o irrazionali; ed infatti l' Autore stesso notò che tale distinzione era spesso piuttosto apparente che reale. Ecco le riduzioni, che senza togliere alla generalità delle formule mi sembrerebbe doversi portare a questa sezione. S' intenda sempre che $a, b, \ldots$ sieno numeri interi positivi, e $p, q \ldots$ quantità positive, escluso in ambidue i casi lo zero. La variabile u o v si elevi a tale potenza positiva da dare alla formula la maggior semplicità, ed alla v si aggiunga pure quel coefficiente che valga a semplificare le formule.

Tavola I. La funzione sia una potenza qualunque del binomio $r \mp u$ oppure $1 \mp v$ moltiplicata per una potenza qualunque della variabile e pel suo differenziale. Dopo alcuni casi particolari di noti integrali, porrei il (E)

$(1-u)^{p-1}u^{q-1}du = 1.^{p-1}1.^{q-1} : 1.^{p+q-1}$, che è il primo Euleriano; segnando con $1.^{p-1}$ il fattoriale $1,2,3\ldots(p-1)$, e, se p non è intero, il gamma $\Gamma(p)$. Questa formula è ripetuta un gran numero di volte, cioè tavola *j*. 8, 10, 12, 17, ... 23, *ij*. 2., *iv*. 9, *x*. 1 .... 22, *xij* 4, 15, 16, 18, 23, 24, *xiv*, 6; e con tutti gli esponenti interi si trova tav. *j*. 4, 6, 9, 13, 14, *xxxv*, 23. Ne è un caso particolare la

$$(Ea)\ \int(1-u)^{p-1}u^{a-1}du=\int(1-u)^{a-1}u^{p-1}du=1^{a-1} : [p]^{a}$$

ridotta a due fattoriali quantunque l'esponente p sia frazionario; essa è data tav. *j*. 5, 19, *ix*, 6, 11, 13, *x*, 4, *xij*, 2, 11, 13, 19, *xxxiij*, 2, 5, 6, 8, 9, 11, *xxxiv* 7, 9. Così pure la

$$(Eb)\ \int(1-u)^{a-p-1}u^{p-1}du = \pi\,[1-p]^{a-1} : 1.^{a-1}\ \text{sen}\ p\pi$$

purchè $a>p$, tav. *j*. 7, 15, 16, *ij* 3, 4, 5, 6, *iv*, 6, 7, 8, 9, 10, *v*, 7, *ix*, 1, 2, 3, *x*, 5, 23 ... 27, *xj*, 1, 2, 3, 4, *xij*, 3, 5, 6, 7, 8, 17, *xiv*, 1 ... 5, 21 ... 24, *xv*, 17. Ed il caso particolare di quest' ultima

$$(Eb\alpha)\int(1-u)^{a-\frac{1}{2}}u^{b-\frac{1}{2}}du=\pi[a+1]^{a}\,[b+1]^{b} : 4^{a+b}\,1.^{a+b}$$

tav. *ix*, 4, 5, 7, 8, 9, 10, *xij*, 1, 10, 12, *xiij*, 5, *xv*, 6, 7, 8, 9, *xvj*, 3, *xxxiij*, 1, 3, 4, 7, 10, *xxxiv*, 6, 8, 10, 15, *xxxv*, 2, 6. Rispetto ai limiti 0, ∞ si conosce la formula meno generale $(E'a\alpha)\int(1-v)^{-1}v^{p-1}dv=\pi\,\text{ctg}\,p\,\pi$, purchè $P<1$; essa comprende le *xviij* 8, *xix*, 9, 12, *xx*, 13 ... 17, *xxij*, 5, 6, 7, 13, 15, 20, *xxviij*, 2, 24, *xxix*, 6, 15, 16. Potrebbe aggiungersi la *xxj*, 7, ma essa mi pare falsa a motivo del passaggio per l'infinito. Rispetto al binomio col segno + si ha la

$$(Fa)\ \int(1+u)^{-1}u^{p-1}du = \tfrac{1}{2}\,Z'\left(\frac{p+1}{2}\right) - \tfrac{1}{2}\,Z'\left(\frac{p}{2}\right)$$

tav. *iij* 1, 13, 18, *xxxv*, 3. Dove Z' è la derivata del log Γ: sarebbe molto opportuna una tavola che da $x=1$ ad $x=2$ contenesse, oltre il logaritmo tabulare del gamma, le sue derivate, che servirebbero anche nell' interpolazione della tavola stessa. Se ne ha un caso particolare nella (*Faα*) $\int(1+u)^{-1}u^{-\frac{1}{2}}du=\frac{\pi}{2}$ tav. *iy* 12, *v*, 23. Altre formule sono la

$$(Fb)\quad \int(1+u)^{-2}u^{p}du=\frac{p}{2}Z'\left(\frac{p+1}{2}\right)-\frac{p}{2}Z'\left(\frac{2+1}{2}\right)+\frac{1}{4}$$

tav. *iv*, 18; la *iv*, 3; *v*, 24, e la *iv*, 1 ed il suo caso particolare *iv*, 11. Poscia abbiamo l' integrale Euleriano

$$(F')\ \int(1+v)^{-p-q}\,v^{p-1}dv=1^{p-1}.1^{-q1}:1.^{p+q-1}$$ tav. *xviij* 12 ... 16 *xxj* 9, *xxvij*, 8 ... 13, 15 ... 19, 21, 22, 23, *xxvij*, 1, 21, 22, 23, *xxviij*, 8, ed il suo caso particolare ad esponente intero *xviij*, 27, 28, *xxxj* 10, 11, ed il caso in cui si riduce al rapporto di un arco al suo seno *xviij*, 2, 3, 4, 5, 7, 11, 17. . . 27, *xix*, 5, 6, 8, *xx*, 1, 3, 4, 5, 6, 9, 12, *xxj* 10 ... 15, *xxij*, 1, 2, 4, 8 .... 12, 14, *xxvij*, 2. . . . . 7, 20, *xxviij*, 3, 4, 5, 6, *xxix*, 11., *xxxj*, 1, 2, 5 . . . 9, 20 . . . 23, *xxxij* 1, ... 17, *xxxv*, 16, 17, e quello in cui contiene la sola trascendente π *xix*, 1, 10, 11, 13 . . . 17, *xxj*, 1 . . . 6, *xxviij*, 1. *xxix*, 2, 3.

Io porrei in una Aggiunta a ciascuna tavola le formule contenenti la somma o differenza di due fra gli integrali precedenti, i quali non si conoscan separatamente ; così l'Aggiunta alla tav. I conterrebbe la

$$(E-E)\ \int(1-u)^{-1}(u^{p-1}-u^{q-1})du=Z'(q)-Z'(p)$$ tav. *iij*, 4, 7, 8, 20, 21, *v*, 3, 4, 8. Ed i suoi casi particolari tav. *iij*, 1, 9, 25, *v*, 2, 5, 6, 12, 13, 14, 18, 20, 21, *xv* 18, — *xv*, 5;

— *iij*, 5, — *iij*, 6, — *vj*, 12, 13, 16, *xvj*, 9, 13. Poscia abbiamo la *xv*, 1. — La *iv*, 4, 5, 23, *v*, 25, 26. — La *vj*, 11, col suo caso particolare *iij*, 17, 24, *v*, 1, 11, 16, 17, 19, 22, *xv*, 2. — La *xviij*, 28, *xxiij*, 16. — La *xxij*, 3, 17, 18. — La *xxiij*, 8. — La *xxiij*, 13. — La *xxiij*, 14. — La *xxiv*, 18. — La *xxvij*, 14. — La *xxix*, 13, 17. — E la *xxix*, 14, 18.

Per tal modo in 30 formule ne sono comprese più di 300. Credo che si farebbe lavoro vantaggioso compendiando in simil maniera tutta l' opera, e discutendone le formule per assicurarsi della loro esattezza ; nell' esame da me fatto riconobbi parecchi errori, ma li trovai tutti notati nell' *errata*. Forse riprenderò altra volta questo studio, intanto fu mio scopo di richiamare la vostra attenzione sopra l'opera del chiar. Matematico Olandese, il quale nel T. V (1857) delle medesime Memorie ha un esteso lavoro sulla riduzione di alcune forme generali d' integrali definiti.

Venezia. — Coi Tipi di G. Antonelli. — 1859.

SBN 606605